	Exercice 1 (3 points) :
	On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ pour tout entier naturel n
0,5	1) a) Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout entier naturel n
0,5	b) Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ pour tout entier naturel n puis montrer que la suite (u_n) est décroissante
0,25	c) En déduire que la suite (u_n) est convergente
	2) Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n
1	a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$ puis écrire v_n en fonction de n
0,75	b) Montrer que : $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout entier naturel n, puis déterminer la limite de la suite (u_n)

	Exercice 2 (3 points) :
	Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points A(1 , 3 , 4) et B(0 , 1 , 2)
0,5	1) a) Montrer que : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$
0,5	b) Montrer que : $2x - 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)
	2) Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0$
0,5	Montrer que (S) a pour centre le point Ω(3 , -3 , 3) et pour rayon 5
0,75	3) a) Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S)
0,75	b) Déterminer les coordonnées du point de contact H du plan (OAB et de la sphère (S)

	Exercice 3 (3 points) :
0,75	1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes ℂ l'équation : $z^2 - 8z + 41 = 0$
	2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B C et Ω d'affixe respectives a , b , c et ω telles que : $a = 4 + 5i$, $b = 3 + 4i$, $c = 6 + 7i$ et $\omega = 4 + 7i$
0,75	a) Calculer : $\frac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A , B et C sont alignés
0,75	b) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' , image de M par ma rotation R de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que : $z' = -iz - 3 + 11i$
0,75	c) Déterminer l'image du point C par la rotation R puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{a-\omega}{c-\omega}$

Exercice 4 (3 points) :

Une urne contient 10 boules portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4
(les boules sont indiscernables au toucher)
On considère l'expérience suivante : on tire au hasard, successivement et sans remise , deux boules de l'urne

1 — 1) Soit A l'événement : « Obtenir deux boules portant deux nombres pairs ». Montrer que : $p(A) = \frac{1}{3}$

2) On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé

2 — Montrer que : $p(X = 1) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Problème (8 points) :

I. Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln(x)$

On considère ci-contre le tableau de variations de la fonction g sur $]0, +\infty[$

X	0		1		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	g(1)	↗	$+\infty$

0,25 — 1) Calculer g(1)

0,75 — 2) En déduire à partir du tableau que g(x) > 0 pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$

II. On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln(x) \quad .$$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2 cm)

0,75 — 1) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat

0,5 — 2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (pour le calcul de la limite on pourra utiliser l'écriture suivante : $f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right]$)

0,25 — b) Montrer que la courbe (C_f) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont la direction est celle de l'axe des ordonnées

0,75 — 3) a) Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$

0,75 — b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$

0,5 — 4) a) Montrer que I(1 , 0) est un point d'inflexion de la courbe (C_f)

0,25 — b) Montrer que : $y = x - 1$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point I

0,75 — c) Construire, dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la droite (T) et la courbe (C_f)

0,5 — 5) a) Montrer que : $\int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{7}{4}$

0,75 — b) En intégration par parties, montrer que : $\int_1^2 (x+1)\ln(x)dx = 4\ln(2) - \frac{7}{4}$

0,5 — c) Calculer, en cm², l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 2$

0,5 — 6) Résoudre graphiquement dans $]0, +\infty[$ l'inéquation : $(x+1)\ln(x) \geq \frac{3}{2}(x+1)$

rabie.isli@gmail.com www.profrabiemaths.com
Prof_Rabie_Maths 06 61 10 15 16